



Analyse du contact entre surfaces rugueuses par la méthode des éléments finis et par un nouveau modèle numérique

Julian Durand, Vladislav Yastrebov, Henry Proudhon, Georges Cailletaud

► To cite this version:

Julian Durand, Vladislav Yastrebov, Henry Proudhon, Georges Cailletaud. Analyse du contact entre surfaces rugueuses par la méthode des éléments finis et par un nouveau modèle numérique. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. 8 p. hal-00592719

HAL Id: hal-00592719

<https://hal.science/hal-00592719>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse du contact entre surfaces rugueuses par la méthode des éléments finis et par un nouveau modèle numérique

J. Durand¹, V. Yastrebov², H. Proudhon¹,
G. Cailletaud¹

¹ Centre des Matériaux, Mines Paristech, France, {julian.durand,henry.proudhon,georges.cailletaud}@mines-paristech.fr

² EPFL, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, vladislav.yastrebov@epfl.ch

Résumé — Deux approches du contact normal sans frottement entre la surface rugueuse d'un matériau élastoplastique et un plan rigide sont proposées. Un nouveau modèle numérique est développé et comparé à une approche éléments finis. Il se nourrit d'une série de modèles mathématiques calibrés par des calculs éléments finis modélisant une seule aspérité. Les interactions entre aspérités sont prises en compte. Ce modèle permet de prédire la courbe charge-déplacement, l'aire réelle de contact et les champs d'ouverture de la fracture rugueuse tout en assurant un coût de calcul très réduit.

Mots clés — rugosité, contact mécanique normal, aire de contact réelle, volume libre, méthode des éléments finis, algorithme de contact réduit.

1 Introduction

Le contact réel entre deux surfaces rugueuses se compose en réalité d'une multitude de contacts ponctuels entre des aspérités. Ainsi, l'aire de contact réelle ne représente en fait qu'un faible pourcentage de l'aire de contact parfaite supposée dans la théorie de Hertz. Ceci engendre des conséquences importantes dans de nombreuses applications comme la conductivité thermique ou électrique, la tribologie, les procédés d'usure ou encore les problèmes d'étanchéité.

Depuis Abbot et Firestone [1], la caractérisation de la rugosité d'une surface passe par l'utilisation de paramètres verticaux (rugosité arithmétique R_a , ligne moyenne m , écart standard σ) ainsi que des paramètres spatiaux (l'espace moyen entre deux pics (A_R), nombre de pics (N_p) ou nombre de croisements de la ligne moyenne (N_0) par unité de longueur) [2].

L'étude du contact se divise principalement en deux catégories. L'un des premiers modèles fut proposé par Greenwood et Williamson [3] où ils considèrent le contact élastique entre un plan rigide et des aspérités sphériques, de même rayon, et dont les hauteurs suivent une loi de distribution Gaussienne. Les modèles statistiques, fournissant une réponse globale rapide et assez précise, ont eu un impact considérable dans l'analyse du contact et ont été développés par de nombreux auteurs, e.g. [4, 5, 6, 7]. Les approches déterministes furent développées pour introduire une meilleure description géométrique en utilisant des fonctions mathématiques pour représenter les aspérités. Les comportements élastique, parfaitement plastique [8] ou élastoplastique [9] et les interactions entre aspérités [10] ont ainsi été intégrés dans des modèles.

La méthode éléments finis a pu être utilisée pour résoudre le problème de contact sur des surfaces fractales artificielles [11]. Initiée par les travaux de Mandelbrot [12], cette direction de recherche a permis de démontrer le caractère fractal des surfaces rugueuses [13, 14, 15, 16, 17]. L'un des principaux résultats largement accepté est la proportionnalité entre l'aire de contact réelle et la charge appliquée pour des faibles chargements.

L'article est organisé comme suit. La section suivante vise à introduire la loi de comportement du matériau et la description de la géométrie d'une surface réelle. L'analyse éléments finis pour une aspérité isolée, et pour un réseau d'aspérités identiques, est présentée en section 3. La section 4 expose les résultats d'un calcul parallèle éléments finis d'une surface représentative élémentaire en contact avec un plan rigide. Cette étude est considérée comme faisant état de référence pour la validation du modèle numérique réduit, présenté en section 5. Une discussion générale sur la réponse globale force-déplacement, l'aire de contact réelle et le volume libre entre les aspérités sera l'objet de la section 6.

2 Problème de contact et analyse de la surface rugueuse

2.1 Description du problème de contact

Les simulations numériques présenteront le contact normal et sans frottement d'un spécimen métallique en Norem avec un plan rigide. Une loi de comportement élastoplastique classique est introduite pour modéliser le matériau. Le comportement est indépendant du temps et l'unique variable d'écrouissage est isotrope (voir Eq. 1 et Fig. 1). Toutes les Analyses Éléments Finis (FEA) ont été réalisées à l'aide du code Éléments Finis implicite Zset [18], utilisant le système de formulation du Lagrangien augmenté. Une comparaison entre les petites et grandes déformations a montré que les courbes force-déplacement et aire de contact-force sont fortement dépendantes de ces hypothèses : l'aire de contact calculée en petites déformations est d'environ 35% supérieure par rapport au calcul en grandes déformations.

Éléments	C	Mn	Cr	Si	Ni
Composition	1.23%	4.3%	25.4%	3.38%	4.0%
	Mo	N2	Fe	Co	B
	2.0%	0.17%	Bal	0.01%	0.001%

$$\text{Loi comportementale : } \sigma_Y = R_0 + Q(1 - e^{-bp}) \quad (1)$$

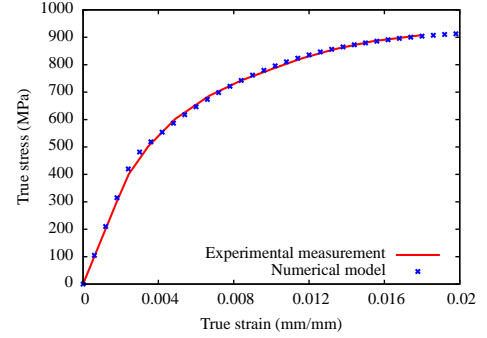


FIG. 1 – à gauche : composition chimique et équation de la loi de comportement du Norem. à droite : Loi de comportement, mesure expérimentale et modèle numérique ($E = 175$ GPa, $\nu = 0.3$, $R_0 = 442.7$ MPa, $Q = 493.5$ MPa and $b = 242.2$)

2.2 Analyse de la surface rugueuse

La surface rugueuse initiale possède une taille de $610 \mu\text{m} \times 460 \mu\text{m}$ et 736×480 pixels. La précision des mesures dans la direction normale à la surface est de $0.02 \mu\text{m}$. La distribution des hauteurs est Gaussienne. A petite échelle, la surface montre une très forte rugosité : chaque aspérité ou creux peut être représenté par un point de mesure. Or, la discrétisation géométrique de chaque pic doit être suffisamment fine pour obtenir des résultats corrects dans la FEA (au moins 10×10 éléments par aspérité, voir également [19]). Un compromis peut être obtenu en enrichissant la surface rugueuse par l'utilisation d'un lissage de Bézier bi-cubique (avec un paramètre $\alpha = 0.5$) [20]. Ce traitement préserve tous les points de mesure et raffine la surface entre chacun d'eux tout en conservant les différentes distributions (voir Fig. 2).

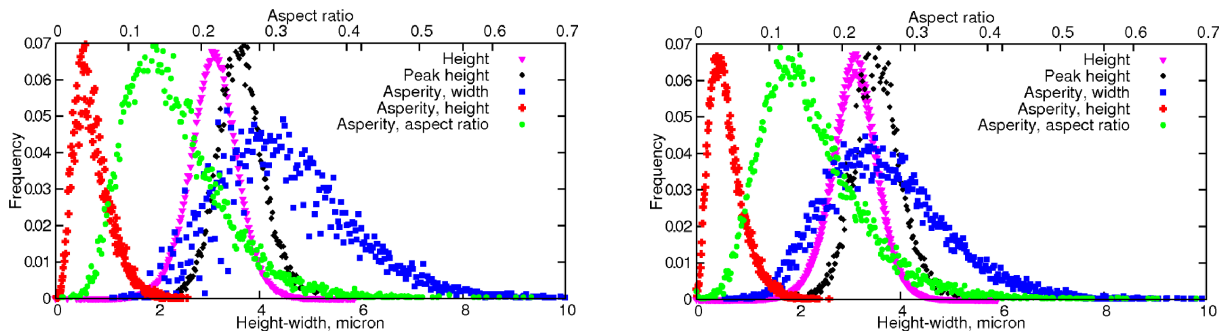


FIG. 2 – Distributions de la surface initiale (à gauche) et lissée (à droite)

2.3 Surface représentative élémentaire

Dans les applications suivantes, la Surface Élémentaire Représentative (SER) est déterminée en terme de représentativité de la rugosité. La SER est ensuite choisie comme étant la plus petite partie de la surface pour laquelle la distribution des hauteurs reste inchangée. La surface initiale a ainsi été découpée en 16, 25, 100 et 144 domaines. Le cas de 100 domaines a été retenu, et un des 23 domaines présentant une distribution suffisamment proche de l'original a été choisi. Ses dimensions sont de $54 \mu\text{m} \times 63 \mu\text{m}$.

3 FEA sur une aspérité

La description de la compression d'une aspérité est le point de départ pour construire un modèle réduit (détaillé en section 5) représentant l'évolution du contact entre un plan rigide et une surface rugueuse. La détermination de paramètres importants tels que la taille de maillage, l'influence de la géométrie ou encore la forme d'une aspérité sont détaillés dans cette section.

3.1 Taille de maillage

La précision de l'aire de contact prédite dans une FEA est liée au nombre de noeuds en contact et ainsi, fortement dépendante de la taille du maillage. Plusieurs simulations ont été réalisées sur un maillage axisymétrique avec respectivement 2×1 , 4×2 , 8×4 , 16×8 , 32×16 et 64×32 éléments dans la région proche de la surface de l'aspérité (voir Fig. 3). Le nombre de couches d'éléments utilisées sous la surface a également été étudié en faisant varier ce nombre de 2 à 64. Pour chacun des cas étudiés, la réponse force-déplacement (voir Fig. 3) a été tracée. On peut tout d'abord observer que les différences entre les divers maillages sont plus importantes pour les petits chargements où la rigidité joue un rôle majeur. D'autre part, le nombre de couches a peu d'influence sur la réponse globale. Une convergence raisonnable est atteinte avec un maillage possédant 32×16 éléments.

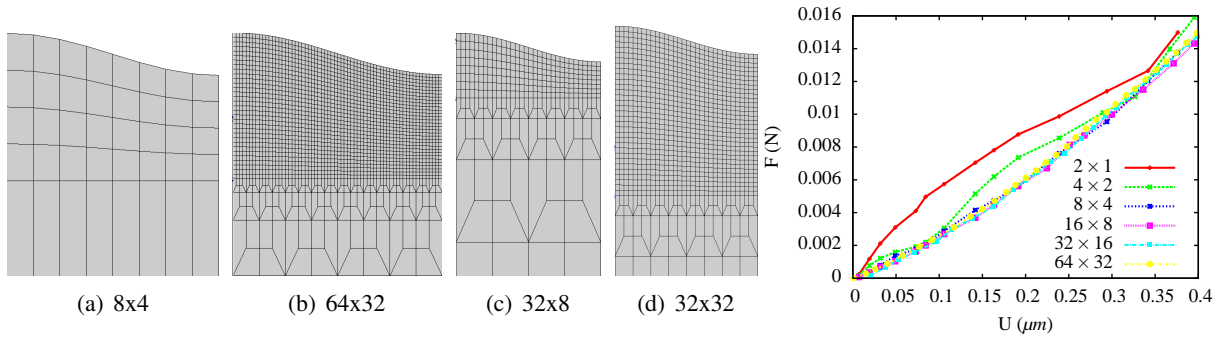


FIG. 3 – Représentation de différents maillages utilisés et tracé de la réponse force-déplacement pour des maillages différents.

3.2 Influence des conditions aux limites

L'étude développée ici a pour but d'analyser l'influence de l'environnement entourant l'aspérité sur les réponses globales. Ceci peut être réalisé par l'application de conditions aux limites variées, à la fois en calcul 2D axisymétrique et 3D. Un paramètre important est la distance d entre le centre de l'aspérité et les frontières du problème. Plusieurs cas ont été étudiés : 3 calculs axisymétriques avec des distances d différentes (L , $2L$ et $4L$), et deux calculs 3D représentant un réseau carré et hexagonal d'aspérités identiques. Grâce aux symétries, le maillage de ces problèmes 3D peut être réduit respectivement à un quart d'aspérité et deux quarts de deux aspérités voisines. Dans ces calculs, la taille de l'aspérité ($\text{largeur} = 10 \mu\text{m}$ et $\text{hauteur} = 1 \mu\text{m}$) ainsi que du maillage (32×16 éléments) sont fixés. De plus, la forme prise pour l'aspérité est une forme sinusoïdale.

Les différents comportements sont analysés selon trois tracés : l'évolution du rapport entre l'aire de contact réelle et l'aire nominale de l'aspérité (A/A_0), du rapport entre le volume libre et le volume libre initial (V/V_0) et de la force au cours du déplacement (voir Fig. 4). On remarque que l'aire de contact n'est pas affectée par la variation de la distance d (Fig. 4.a.). Le réseau pris en compte amène, quant à lui, à des écarts pouvant atteindre 12%. Pour les trois cas "compacts", les différences entre les réponses force-déplacement (Fig. 4.b.) et volume-force (Fig. 4.c.) restent inférieures à 10% lorsque la surface de contact se situe au delà de 70% de la surface totale.

3.3 Influence de la forme d'aspérité

Cette section vient comparer quatre formes d'aspérité différentes : une sinusoïde, un paraboloïde, une ellipsoïde et un cône (voir Fig. 5a).

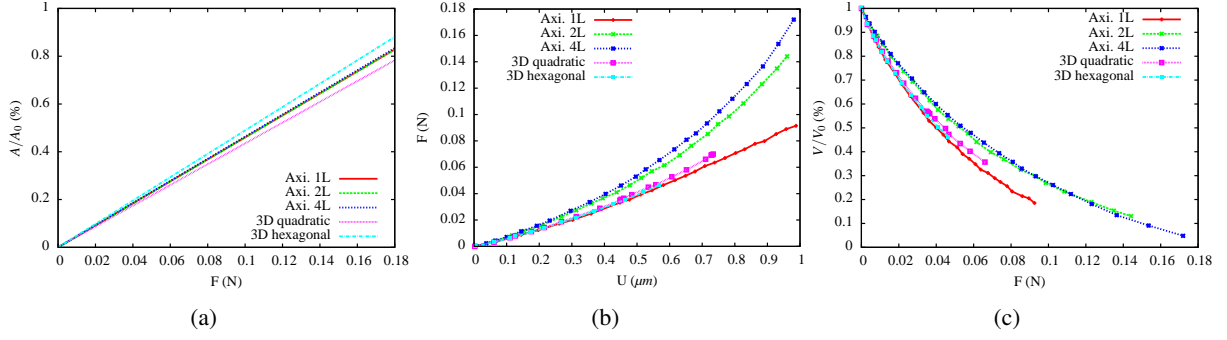


FIG. 4 – Influence des conditions aux limites : a) Évolution de l'aire de contact. b) Réponse force/déplacement. c) Évolution du volume libre.

Il est tout d'abord essentiel de noter que la linéarité des réponses $A/A_0(F)$ est, d'une part vérifiée pour toutes les formes, et d'autre part identique d'une forme à l'autre (écarts inférieurs à 2%, voir Fig.5b). La variation de volume est plus faible pour les aspérités massives. Les formes conique et sinusoïdale ont une quantité de matière comparable, cependant le volume libre varie moins pour l'aspérité sinusoïdale. Ce résultat plutôt intuitif confirme que plus l'aire du sommet de la surface est petite, plus la forme s'écrasera vite (Fig.5c).

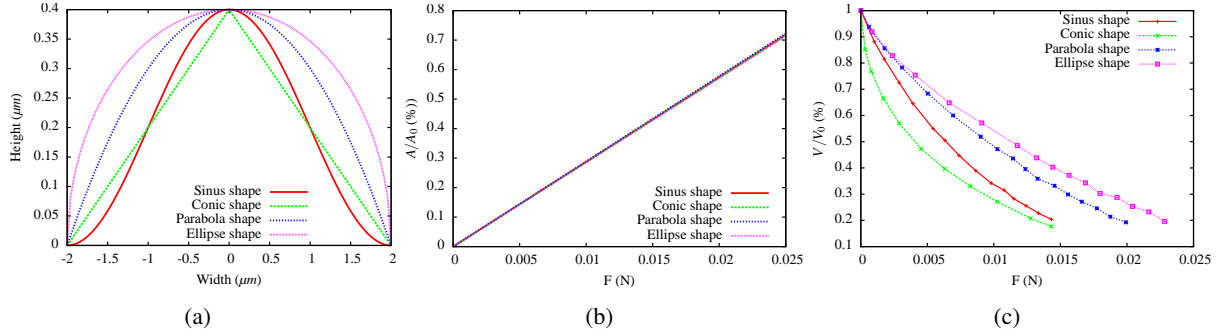


FIG. 5 – Influence de la forme : a) Différentes formes utilisées. b) Évolution de l'aire de contact. c) Évolution du volume libre.

L'influence de l'aspect de l'aspérité (rapport hauteur/largeur et largeur) a également été analysée. Partant des distributions de la surface obtenues (voir section 2), plusieurs simulations ont été réalisées avec des rapports de 0.05, 0.075, 0.1 et 0.15 et des largeurs de 4 μm et de 6 μm. Les informations importantes que l'on peut tirer de ces résultats (non présentés ici) sont la faible dépendance du rapport hauteur/largeur sur l'aire de contact et le volume libre. La réponse force-déplacement montre quant à elle une dépendance non linéaire face au rapport de l'aspérité.

4 FEA d'une surface rugueuse

L'étude d'une aspérité et d'une microstructure périodique d'aspérités identiques nous a permis d'approfondir en détail le processus de déformation local. Cependant, des modèles géométriques et analytiques simples ne peuvent refléter rigoureusement les lois de déformations globales du fait des nombreux paramètres à prendre en compte (interactions, dimension fractale, lois de distributions, ...). C'est pourquoi une étude éléments finis de grande échelle doit être réalisée.

4.1 Maillage et conditions aux limites

Au voisinage de la surface, un maillage très fin est nécessaire pour représenter la géométrie complexe de la surface et pour capturer les hauts gradients de déformation. D'autre part, la hauteur totale du maillage doit être suffisamment grande pour représenter la déformation du volume de matière et éviter les effets de bord. Pour garantir ces deux aspects tout en limitant la taille du problème, un maillage

transitoire a été fabriqué permettant un raffinement rapide du maillage (voir Fig. 6.a.). Le maillage éléments finis utilisé pour cette analyse possède 964 000 nœuds, dont plus de 945 000 sont situés dans les 8 premières couches adjacentes à la surface (Fig.6b). La surface en elle même possède environ 100 000 éléments. Ainsi, seulement 1.5% des éléments sont utilisés pour représenter le volume de matière où les contraintes sont plus homogènes. Pour traiter un si grand problème dans un temps raisonnable, le calcul parallèle est utilisé. Une méthode d'implémentation classique de type FETI (Finite Element Tearing and Interconnection) [18] est appliquée avec le solveur DSCPACK pour la résolution locale [21]. Le maillage a été divisé en 16 sous domaines égaux (de différentes couleurs sur la Fig. 6b). Des conditions aux limites symétriques sont appliquées sur toutes les faces latérales, et le déplacement vertical vers le plan rigide est imposé sur la face inférieure. Tous les autres déplacements de cette face sont bloqués. Pour réaliser le calcul, une station de travail de 8 processeurs double cœur Intel Xeon X5550 2.67GHz et 160 Gb de RAM ont été utilisés. Du fait des grands déplacements au niveau des interfaces entre sous domaines et de la non linéarité du matériau et de la géométrie, 220 pas de temps ont été calculés pour arriver à un déplacement de 1 micromètre.

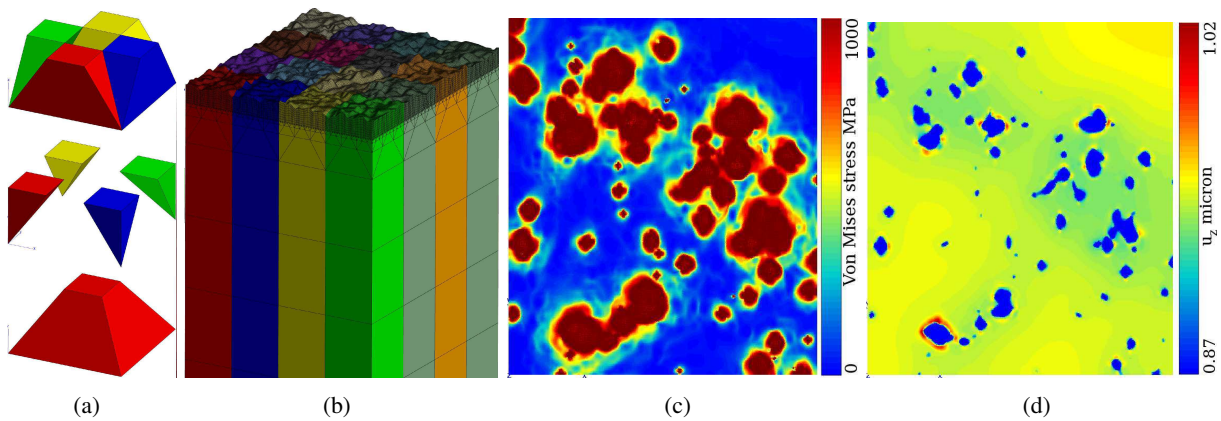


FIG. 6 – a) Maillage transitoire. b) Maillage de la surface rugueuse $54 \mu\text{m} \times 63 \mu\text{m}$. c) Distribution des déplacements verticaux et d) Distribution des contraintes de von Mises pour une aire de contact de 6%.

4.2 Résultats

La figure 6.c. montre le déplacement vertical de la surface rugueuse. L'échelle de couleurs a été choisie de sorte à représenter les zones de contact et rendre visibles les déformations de la surface rugueuse dans une grande zone proche des aspérités. Elle révèle que les interactions entre aspérités s'étendent à de grandes distances des zones de contact. Les contraintes de von Mises (Fig. 6.d.) saturent très vite, et le processus de contact résulte en la croissance des zones saturées loin des limites des zones de contact. Pour le déplacement final de 1 micromètre, la déformation plastique cumulée atteint 200% dans certaines aspérités. Les résultats de ce calcul seront plus amplement détaillés en section 6.

5 Analyse du contact rugueux : un nouveau modèle réduit

L'idée principale de ce modèle est de détecter et représenter chaque aspérité de la surface rugueuse par un élément (poutre) avec des modèles comportementaux issus de la FEA sur une aspérité. Les interactions entre les aspérités sont prises en compte en déplaçant le voisinage d'une aspérité selon une loi phénoménologique découlant de la FEA d'une aspérité en contact.

5.1 Algorithme du modèle réduit

- *Étape 1* : Lissage de la surface rugueuse avec des surfaces de Bézier bi-cubiques. Localisation et sauvegarde des aspérités (position, hauteur, rayon et surface en base d'aspérité).
- *Étape 2* : Approximation de chaque aspérité par une aspérité sinusoïdale et axisymétrique.
- *Étape 3* : Déplacement pas à pas du plan rigide vers la surface rugueuse.
- *Étape 4* : Si le sommet d'une aspérité est supérieur au plan rigide, elle est déformée selon les modèles comportementaux déterminés.

- *Étape 5* : Le voisinage d'une aspérité est déplacé selon la loi d'interactions déterminée.
- *Étape 6* : La force et l'aire de contact totales sont obtenues par sommation sur toutes les aspérités en contact.
- *Étape 7* : Détermination du volume libre par intégration des espaces entre la surface rugueuse et le plan rigide.

5.2 Lois de comportement du modèle

L'étude réalisée en section 3 permet de déterminer les modèles de déformation des aspérités en contact. Le mouvement du plan rigide est gouverné par le déplacement vertical U . Le modèle force-déplacement permet d'associer une force à ce déplacement. Une aire de contact en est également déduite pour chaque aspérité. Les lois déterminées dépendent de la largeur w et du rapport hauteur/largeur r de l'aspérité. Ainsi, pour chaque paire largeur/rapport, deux fonctions mathématiques décrivant les réponses $F(U, w, r)$ et $A(F, w, r)$ sont déterminées en faisant intervenir des coefficients $c_i(r)$.

Tous les coefficients c_i ont été approximés par des fonctions mathématiques dépendant de r et faisant intervenir de nouveaux coefficients c_{ij} . De la même manière, ces paramètres c_{ij} sont approximés par de nouvelles fonctions dépendant cette fois-ci de la largeur d'aspérité w . Pour simplifier, toutes ces différentes combinaisons de coefficients amènent à des réponses F et A de la forme : $F(U, c_i(r, c_{ij}(w)))$ et $A(F, c_i(r, c_{ij}(w)))$.

5.3 Interactions entre aspérités

Lorsqu'un point de la surface est en contact avec la fondation rigide, le volume de matière adjacent se déforme. Néanmoins, la taille de la région déformée est limitée et les points suffisamment éloignés gardent leur position initiale. Il est supposé ici que la forme locale des aspérités reste inchangée. Une loi phénoménologique a été déterminée à l'aide des calculs axisymétriques sur une aspérité. Le déplacement radial dans le voisinage d'une zone de contact sera négligé car son influence sur la topologie de l'aire de contact et du volume libre n'est pas significative. Le déplacement axial de la surface proche d'une aspérité ($w = 4 \mu\text{m}$, $h = 0.4 \mu\text{m}$) est représenté en Fig. 7.a. De manière générale, ce déplacement peut être approximé par l'équation :

$$u_z = au_z^0 \sqrt{\frac{2d}{w}} \exp\left(-b \frac{2d}{w}\right), \quad (2)$$

où u_z^0 est le déplacement du sommet d'aspérité, d la distance du centre de l'aspérité, w la largeur d'aspérité et a, b des paramètres du modèle qui peuvent dépendre du rapport de l'aspérité. Dans cette étude, ces coefficients sont pris constants ($a = 23.64 \cdot 10^{-3}$; $b = 0.4367$). On observe que le déplacement axial décroît relativement doucement et s'approche de zéro à une distance égale à 16 fois le rayon de l'aspérité. Ici, nous supposons l'additivité des champs de déplacement dus à l'ensemble des aspérités en contact. Cette loi d'interaction a été validée à l'aide de plusieurs calculs axisymétriques pour la même forme d'aspérité : la frontière latérale étant fixée à une distance de 4, 8, 16 micromètres du centre de l'aspérité. Un exemple de déformation de la surface réalisé avec la loi proposée pour différentes aspérités en contact est visible en Fig. 7.b.

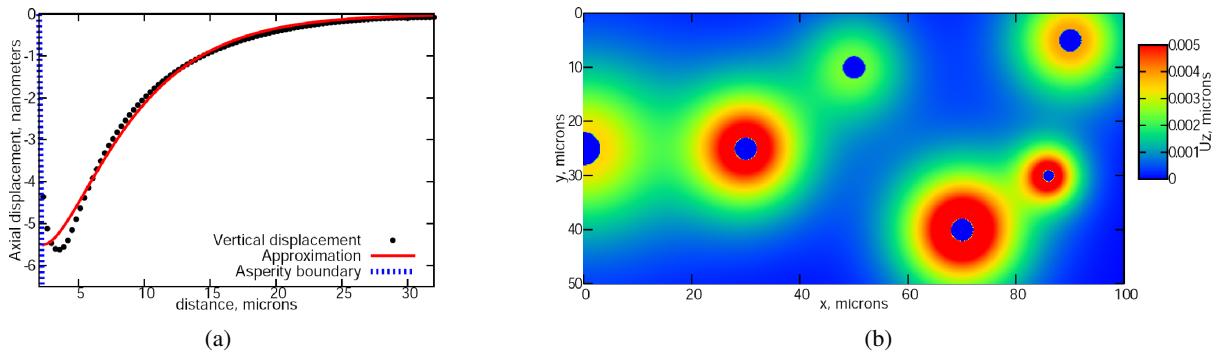


FIG. 7 – a) Déplacement axial du voisinage d'une aspérité en contact. b) Exemple de déformation de la surface avec la loi d'interaction proposée.

6 Résultats

La force maximale atteinte dans la FEA est d'environ 0.5 N , ce qui correspond à un déplacement du plan rigide de $1\text{ }\mu\text{m}$. Les dimensions de la SER étant de $54\text{ }\mu\text{m} \times 63\text{ }\mu\text{m}$, cette force correspond à une pression de contact de 147 MPa . L'évolution de l'aire de contact en fonction de la charge appliquée est strictement linéaire (voir Fig. 8.b). Tout d'abord ces tracés révèlent l'importance de la prise en compte des interactions dans le modèle réduit. Pour le déplacement maximum, la prédiction faite sans prise en compte des interactions surestime la force de contact d'environ 60%. Comme il peut être observé en Fig. 8.a, les interactions réduisent significativement la force de réaction pour arriver à une approximation très proche de la FEA. Les mêmes remarques peuvent être faites pour l'analyse de la surface de contact où l'on peut observer une forte sous-estimation de la réponse (presque 20% contre 3% avec prise en compte des interactions, voir Fig. 8.b).

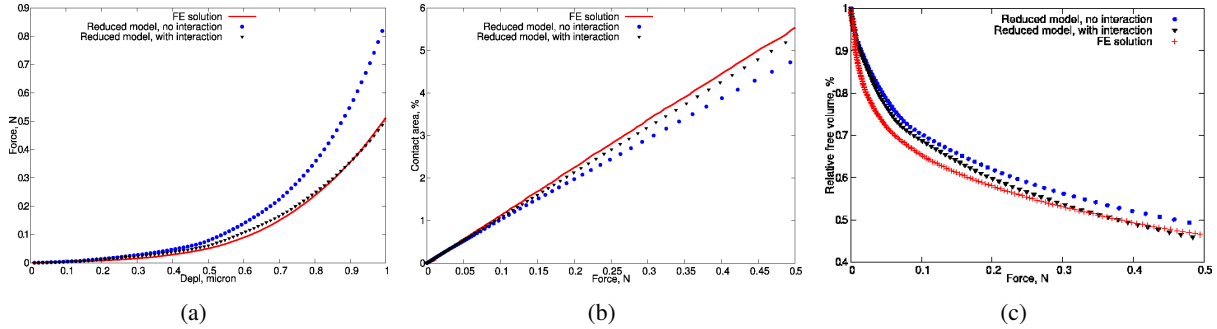


FIG. 8 – Comparaison FEA et Modèle réduit. a) Réponse globale $F(U)$. b) Réponse globale $A(F)$.

L'analyse des topologies amène également à de très bonnes conclusions. En effet, on peut observer (Fig. 9.a) que toutes les zones de contact sauf une (représentée par une flèche) ont été détectées par le modèle réduit. Malgré l'approximation axisymétrique, les zones de contact locales ont été déterminées avec une bonne précision et leur tailles moyennes sont bien représentatives de la réalité. Pour le chargement final, les topologies du volume libre issues du calcul éléments finis et du modèle réduit sont en très bon accord (voir Fig. 9.b et .c respectivement). On peut remarquer que les longues traces d'usages sont clairement identifiables dans les deux cas. Le seul point d'ombre du modèle réduit provient de certaines aspérités qui cachent quelques portions des zones creuses. L'évolution globale de ce volume libre est présentée en Fig. 8.c. Qualitativement, deux étapes peuvent être visualisées : une forte décroissance pour les petites charges suivie d'une phase quasiment linéaire avec une pente beaucoup plus faible.

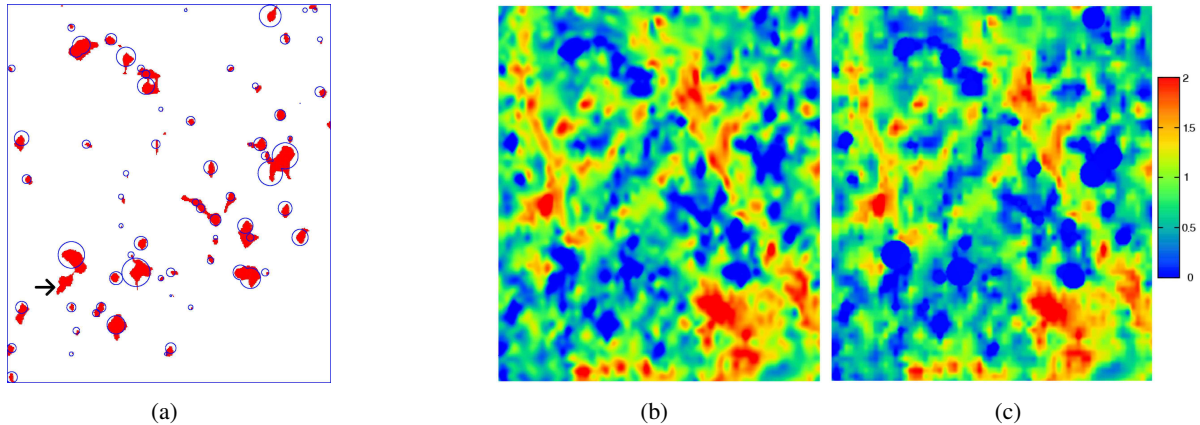


FIG. 9 – a) Comparaison de l'aire de contact entre la FEA et le modèle réduit ($u_z = 1\text{ }\mu\text{m}$, $F = 0.5\text{ N}$, $A/A_0 = 5.58\%$). b) Topologie du volume libre de la FEA. c) Topologie du volume libre du modèle réduit.

7 Conclusion

Une surface élémentaire représentative a été construite à partir d'un relevé topographique complet d'une pièce en Norem destinée à assurer l'étanchéité dans un contact métal/métal. Elle nous permet

d'avoir en main un modèle géométrique pouvant être exploité sur deux objectifs. Le premier consiste en la réalisation d'un calcul éléments finis comprenant plus de 100 000 nœuds sur la surface de contact. Le second concerne le développement d'un modèle réduit fournissant une solution à notre problème de contact rugueux en quelques secondes et aboutissant à des résultats en très bon accord avec la FEA (qui nécessite plusieurs jours de calculs). Le modèle réduit proposé prédit avec une grande précision les réponses globales étudiées (force-déplacement, aire de contact-force, volume libre-force). Il fournit également de très bonnes topologies du contact. Jusqu'à présent, la validation de ce modèle n'a été faite que sur une seule SER et nécessite donc de nouvelles études. En l'état actuel des choses, ce modèle réduit est un outil très utile pour l'étude de très grandes surfaces, ne pouvant être simulées au moyen de codes éléments finis, ainsi que pour des analyses statistiques de rugosité. L'analyse éléments finis a également permis de démontrer que même des chargements relativement modérés (150 MPa) conduisent à d'extrêmement hautes déformations locales : la déformation plastique cumulée atteint 200% sur certaines aspérités. Des matériaux classiques ne sont pas supposés supporter de telles déformations. C'est pourquoi des modèles d'endommagement et/ou de rupture devraient être incorporés dans cette analyse pour obtenir des résultats plus physiques.

Références

- [1] E.J. Abbott and F.A. Firestone. Specifying surface quality - a method based on accurate measurement and comparison. *Mech. Eng.*, 55 :569, 1933.
- [2] B. Bhushan. Surface roughness analysis and measurement techniques. *Modern tribology handbook*, 1 :49–119, 2001.
- [3] J.A. Greenwood and J.B.P. Williamson. Contact of nominally flat surfaces. *Proc. Royal Soc. London*, A295 :300–319, 1966.
- [4] D.J. Whitehouse and J.F. Archard. The properties of random surface of significance in their contact. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 316 :97–121, 1970.
- [5] A.W. Bush, R.D. Gibson, and T.R. Thomas. The elastic contact of a rough surface. *Wear*, 153 :53–64, 1992.
- [6] A.W. Bush, R.D. Gibson, and G.P. Keogh. Strongly anisotropic rough surfaces. *Journal of Lubrication Technology*, 101 :15–20, 1979.
- [7] A.W. Bush and R.D. Gibson. The elastic contact of a rough surface. *Wear*, 35 :87–111, 1987.
- [8] W.R. Chang, I. Etsion, and D.B. Bogy. An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces. *J. of Tribology*, 109 :257–263, 1987.
- [9] Y. Zhao, D.M. Maietta, and L. Chang. An asperity microcontact model incorporating the transition from elastic deformations to fully plastic flow. *J. of Tribology*, 122 :86–93, 2000.
- [10] Y. Zhao and L. Chang. A model of asperity interactions in elastic-plastic contact of rough surfaces. *J. of Tribology*, 123 :857–864, 2001.
- [11] L. Pei, S. Hyun, J.F. Molinari, and M.O. Robbins. Finite element modeling of elasto-plastic contact between rough surfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53 :2385–2409, 2005.
- [12] B.B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. New York, 1982.
- [13] B. Bhushan. Contact mechanics of rough surfaces in tribology : multiple asperity contact. *Tribology Letters*, 4 :1–35, 1997.
- [14] B.N.J. Persson. Theory of rubber friction and contact mechanics. *JOURNAL OF CHEMICAL PHYSICS*, 115 :3840–3861, 2001.
- [15] A. Majumdar and B. Bhushan. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surface. *J. of Tribology*, 113 :1–11, 1991.
- [16] B. Bhushan and A. Majumdar. Elastic-plastic contact model of bifractal surfaces. *Wear*, 35 :87–111, 1975.
- [17] C. Vallet. *Fuite liquide au travers d'un contact rugueux : application à l'étanchéité interne d'appareils de robinetterie*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers., 2008.
- [18] C. Farhat and F.-X. Roux. Implicit parallel processing in structural mechanics. *Computational Mechanics Advances*, 2 :1–24, 1994.
- [19] B.N.J. Persson. Contact mechanics for randomly rough surfaces. *Surface Science Reports*, 61 :201–227, 2006.
- [20] G.E. Farin. *Curves and surfaces for CAGD : a practical guide, 5th edition*. Morgan Kaufmann, 2002.
- [21] P. Raghavan. Dscpack : Domain-separator codes for the parallel solution of sparse linear systems. *Tech. Rep. CSE-02-004, Department of Computer Science and Engineering, The Pennsylvania State University, University Park, PA 16802*, 2002.